2019 年臺灣國際科學展覽會
優勝作品專輯

作品編號　**010006**

參展科別　數學

作品名稱　反輪得行—胎痕軌跡關係辨析

得獎獎項　大會獎：四等獎

就讀學校　臺南市立建興國民中學

指導教師　陳亮君、王俊乃

作者姓名　吳少愚

關鍵詞　轎車軌跡、車禍鑑定、四輪關係

作者簡介



我是吳少愚，目前就讀於建興國中，我對數理科有著十足的興趣，尤其是物理科；當我發想了我的研究主題，一開始曾嘗試著用物理的分析解釋我的模型，然而數學卻可以巧妙的避開複雜的結構關係；而不斷地推敲後發現，竟也只留下了數學的方程式!我也非常感謝許多師長提供了非常多的意見，讓我能進行更全面的思考，得出結論。

摘要

本研究旨在探討轎車四輪關係。藉由車體結構的限制:左右互相平行，其距離為輪寬 w，後輪沿車身延長輪距 d，會碰到當時刻的前輪位置，以此做為發想，發展出前推後、後推前、左推右及右推左四種推論方式，最後得到結論。

研究最後將結論應用於許多方面，如應用於刑事鑑定方面，此外亦將程式寫於 MATLAB 以利修改跑跑卡丁車只留下了後輪軌跡之程式不足。

Abstract

This study is intended to probe into the relation of track marks among four wheels of a car. Based on the relation of framework of car body: being parallel to each other from the left to the right with a distant of w. The rear wheel running along the tangent meets where the front wheel is positioned at that moment with the distant of d. Using this , we can develop four ways of discussing the formula :front to rear wheels, rear to front wheels, left to right wheels, and right to left wheels, and obtained a conclusion.

This study will be applicable to different fields, such as criminal identification, and the formula has been written on MATLAB in order to benefit the programming “CrazyRacing KartRider” which is insufficient since it only includes the rear wheel’s formula.

壹、研究動機

「咻!」一聲過彎，在迷人的跑跑卡丁車世界裡，這似乎是最爽快的一件事了。但仔細一瞧，車子只留下了兩條胎痕，難道是有什麼理由讓後輪自動跟著前輪的軌跡嗎?經過了簡單實驗後，發現這是一個錯誤的結論，不禁令我更加好奇—車子四個輪胎具有什麼關係存在呢?又可否將其關係式做為修改程式之基礎，亦或是應用於刑事鑑定等其他方面上呢?

貳、研究目的

一、以胎痕判斷其車輛資訊。

(一)分辨四輪胎痕。

(二)輪距、輪寬。

(三)前進方向。

二、找出四輪之胎痕關係式。

(一)已知輪距 d、後輪軌跡，推導出以後輪表示的前輪函數。

(二)已知輪距 d、前輪軌跡，推導出以前輪表示的後輪函數。

(三)已知輪寬 w、左輪軌跡，推導出以左輪表示的右輪函數。

(四)已知輪寬 w、右輪軌跡，推導出以右輪表示的左輪函數。

三、應用:

(一)修改跑跑卡丁車之程式不足。

(二)應用於刑事鑑定、車禍現場等。

參、研究設備及器材

紙、筆、直尺、圓規、電腦、數學動態軟體 GeoGebra、數學程式軟體 MATLAB、自製腳踏車、墨水、玩具遙控車。

肆、名詞解釋

一、此報告中之車輛已簡化為鋼體及車輪無寬度之系統。

二、前輪 f:軌跡座標表示為(fx,F(fx))；後輪 b:軌跡座標表示為(bx,B(bx))。

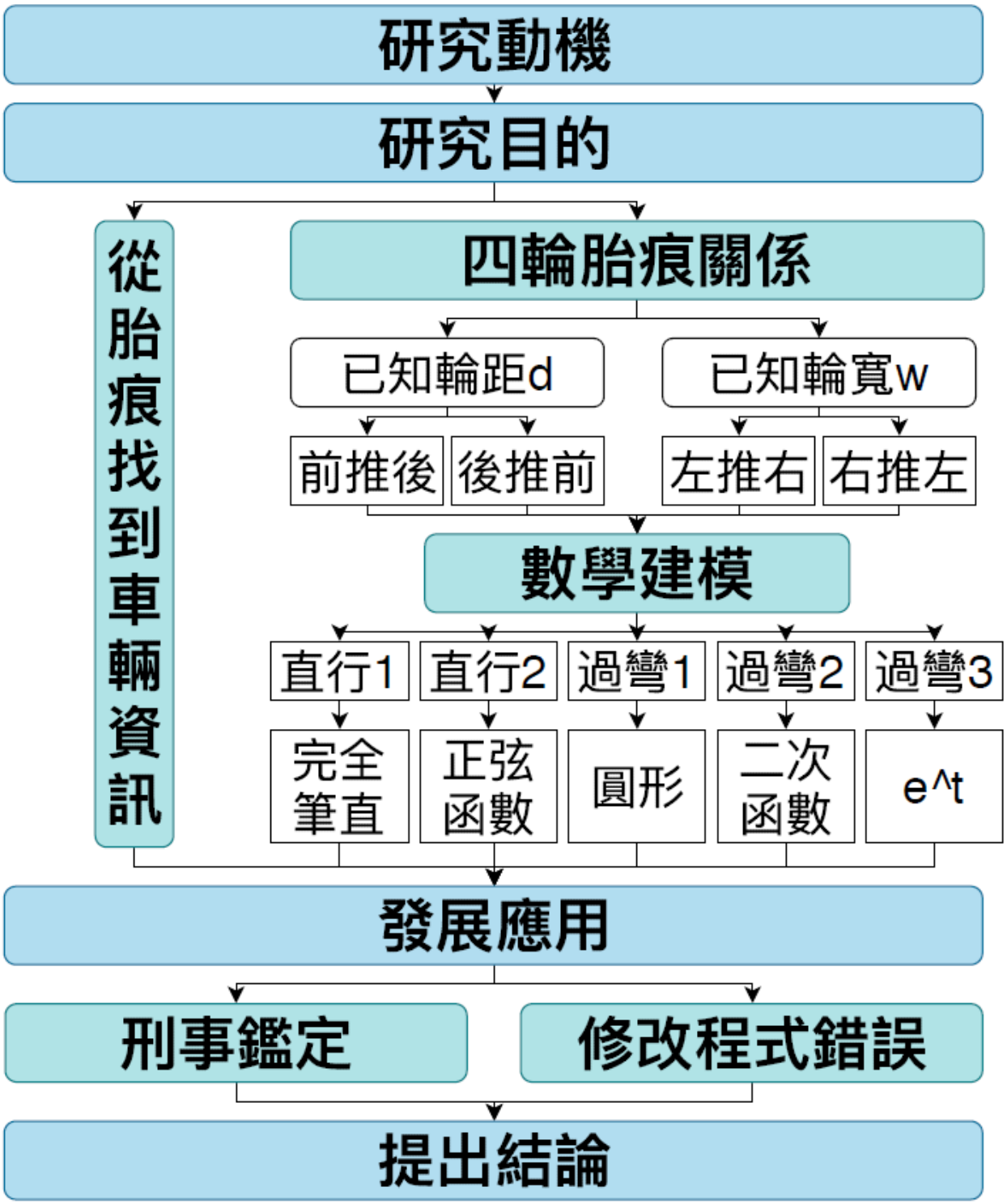
三、左輪 l:軌跡座標表示為(lx,L(lx))；右輪 r:軌跡座標表示為(rx,R(rx))。

四、輪距 d:輪軸長，前後輪距離；輪寬 w:輪軸寬，左右輪距離。

五、角度:後輪斜率 $\tan\theta$ 、前輪斜率 $\tan\theta'$、前輪偏斜角 Φ。

六、前輪曲率半徑 rf；後輪曲率半徑 rb。

伍、研究架構圖


研究動機
研究目的
從胎痕找到車輛資訊
四輪胎痕關係
已知輪距d
已知輪寬w
前推後
後推前
左推右
右推左
數學建模
直行1
直行2
過彎1
過彎2
過彎3
完全筆直
正弦函數
圓形
二次函數
e^t
發展應用
刑事鑑定
修改程式錯誤
提出結論

陸、過程及實驗結果

一、以胎痕判斷其車輛資訊。

為了成功推導關係式，我對我的假設做了兩個簡單的實驗:

(一)實驗一:驗證“後輪沿切線一方向延長固定距離，將交於前輪軌跡一點”。

我們知道，後輪沿著車身延長輪距 d，會是前輪的座標，而後輪又恆與車輛平行，因此，在不發生甩尾、打滑的情況之下，後輪前進方向，也就是軌跡切線其中一個方向，延長固定距離應該要交於前輪軌跡的一點，為了驗證推論，設計了此實驗。

1.模型:為了方便調整變因，因此利用積木，組出一架腳踏車(如圖 1-1)。

2.後輪沾紅色墨水，前輪沾黑色墨水，行經任意軌跡(如圖 1-2)，於後輪軌跡任取 n 點，作圖切線延長，觀察兩方向如何交於前輪。



圖 1-1

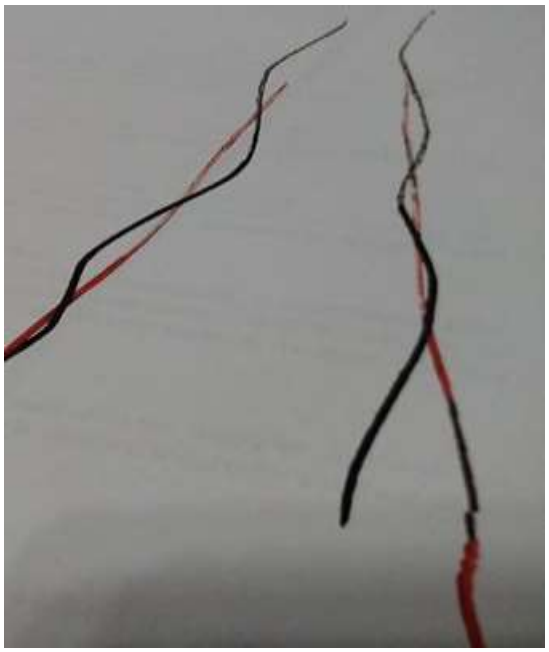


圖 1-2

3.經觀察發現，切線其中一方向交前輪軌跡於一點之距離非固定，有時甚至無法交會，此方向為非行進方向，而另一方向交前輪軌跡於一點之距離固定，皆為當時模型之輪距，因此“後輪與車輛平行，將後輪軌跡任一點沿切線一方向(也就是行進方向)延長輪距 d，便是當時刻的前輪位置”此推論(結果一)成立。

4.實驗表格:括號內為理論值

	第一次取點	第二次取點	第三次取點	第四次取點
d=5 cm	5.00cm (5.00)	5.00cm (5.00)	4.90cm (5.00)	5.00cm (5.00)
d=6 cm	6.10cm (6.00)	6.10cm (6.00)	5.90cm (6.00)	6.00cm (6.00)
d=7 cm	7.00cm (7.00)	7.00cm (7.00)	6.80cm (7.00)	7.00cm (7.00)
d=8 cm	7.90cm (8.00)	8.00cm (8.00)	8.00cm (8.00)	8.00cm (8.00)

(二)實驗二:測試後輪是否具有追隨性。

根據實驗一的結果，我們可以發現到當後輪軌跡為一圓時，前輪軌跡也必為一同心圓，且根據畢氏定理，將符合$rf^2 = rb^2 + d^2$(如圖 2-1)。但若此時將後輪擺放於當時半徑為 rb 的圓以外區域上(即圖 2-1 非紅色區域)再以前輪繞半徑為 rf 的同心圓(圖 2-1 黑色區域)，後輪軌跡是否會逐漸回到半徑為 rb 的圓上呢?

1. 模型:同實驗一之模型。

2. 後輪沾紅色墨水，前輪沾黑色墨水；將後輪擺放於當時半徑為 rb 的圓以外區域上再以前輪繞半徑為 rf 的同心圓(如圖 2-2)，觀察後輪軌跡是否會逐漸回到半徑為 rb 的圓上(追隨性)。

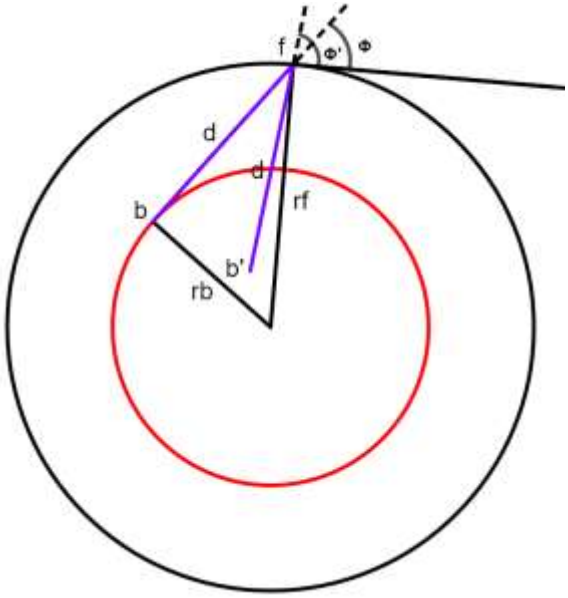


圖 2-1

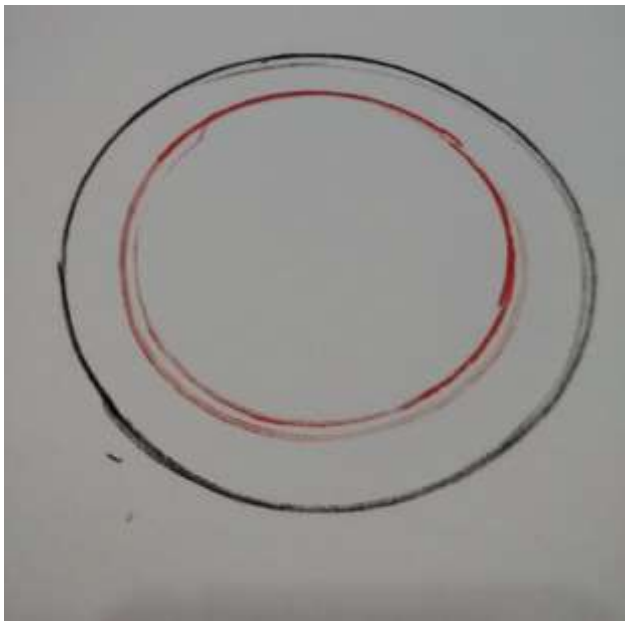


圖 2-2

3. 經觀察發現，後輪具有追隨性(結果二)!後輪軌跡將產生一個螺線的效果逐漸趨於半徑為 rb 的圓上，而關於此追隨性的性質，我決定之後再進行討論；而此追隨性為一種趨向，也是造成後輪打滑的其中一種原因。

4. 實驗表格:

	$\phi' - \phi = 0°$	$\phi' - \phi = 15°$	$\phi' - \phi = 30°$	$\phi' - \phi = -15°$
rf=8cm d=5cm	繞半徑 rb 同圓	具追隨性	具追隨性	具追隨性
rf=8cm d=6cm	繞半徑 rb 同圓	具追隨性	具追隨性	具追隨性
rf=10cm d=7cm	繞半徑 rb 同圓	具追隨性	具追隨性	具追隨性
rf=10cm d=8cm	繞半徑 rb 同圓	具追隨性	具追隨性	具追隨性

(三)實際分辨:分辨玩具遙控車軌跡所留下的資訊。

利用結果一，依照下列步驟即可得到車輛的資訊。

步驟 1:找出目標車痕，利用左右互相平行的特性，找到其一組前後輪的系統。

步驟 2:在兩條軌跡上各做 n 條切線，共 2n 條，產生 4n 個方向的射線。

步驟 3:其中必有 n 條射線接到另一胎痕的長度相同，此長度為輪距；射線方向必為同向（順或反），便是行進方向；此兩條射線起始點的共同胎痕即為後輪胎痕。

步驟 4:根據前後輪關係，即可判斷左右兩側，在一側作法線，交另一側距離為輪寬 w。

藉此，即可得知 1.四輪胎痕 2.輪距、輪寬 3.行車方向，在刑事鑑定上便可發揮作用，如:以輪距、輪寬去推斷逃逸車型、以行進方向推知逃逸方向等。

二、找出四輪之胎痕關係式。

(一)已知輪距 d、後輪軌跡，推導出以後輪表示的前輪函數。

根據“後輪與車輛平行，將後輪軌跡任一點沿切線一方向(行進方向)延長輪距 d，便是當時刻的前輪位置”此推論的成立，並假定車輛向+x 方向行車，可得以下推導過程:

圖 1 為一車輛留下軌跡的分析:

紅色弧為後輪胎痕、黑色弧為前輪胎痕，紫色為其中一個時刻之一側車架，f 為前輪座標、b 為後輪座標，可推知:

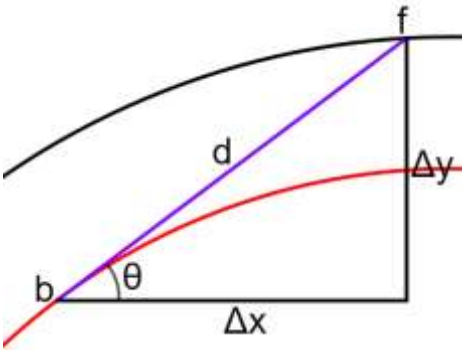


圖 1

(Ⅰ)含有時間 t 之推導:

若已知 bx(t)、by(t)，則可繪製成為動態圖。

$$\begin{cases} fx = bx + \Delta x \\ fy = by + \Delta y \end{cases}$$

$$\begin{cases} fx(t) = bx(t) + d\cdot\cos\theta = bx(t) + d\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right) \\ fy(t) = by(t) + d\cdot\sin\theta = by(t) + d\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right) \end{cases}$$

可得前輪參數式:

$$\left(bx(t) + \frac{d}{\sqrt{1+\left(\frac{by'(t)}{bx'(t)}\right)^2}}, by(t) + d\frac{\frac{by'(t)}{bx'(t)}}{\sqrt{1+\left(\frac{by'(t)}{bx'(t)}\right)^2}}\right) \text{ 或}$$

$$\left(bx(t) + \frac{d\cdot bx'(t)}{\sqrt{bx'(t)^2+by'(t)^2}}, by(t) + \frac{d\cdot by'(t)}{\sqrt{bx'(t)^2+by'(t)^2}}\right) \text{（式 1-1）}$$

(Ⅱ)不含時間 t 之推導:

若只留下了軌跡(bx, B(bx))，求(fx, F(fx))。

$$\begin{cases} fx = bx + d \cdot \cos\theta = bx + d\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right) \\ fy = by + d \cdot \sin\theta = by + d\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right) \end{cases}$$

可得前輪參數式:

$$\left(bx + \frac{d}{\sqrt{1+B\prime(bx)^2}}, B(bx) + d\frac{B\prime(bx)}{\sqrt{1+B\prime(bx)^2}}\right) \quad \text{（式 1-2）}$$

(二)建立後推前基本模型:

1. 為了修改跑跑卡丁車的程式不足，利用數學動態軟體 GeoGebra 試作圖形。

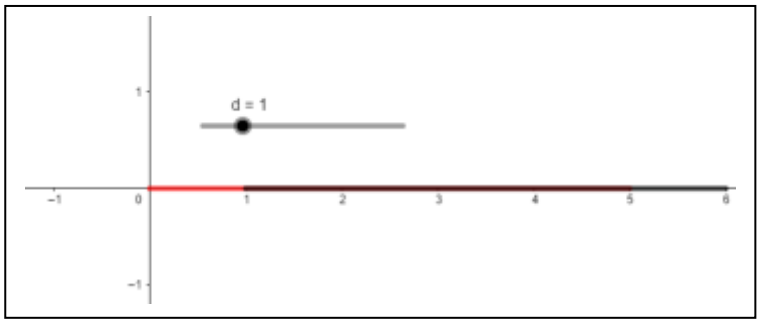
2. curve[f(t), g(t), t, a, b]指令會產生參數式(f(t), g(t))的圖形，t 的範圍為 a≤t≤b。

3. 紅色為後輪函數；黑色為前輪函數。

4. 分為直行與過彎兩種狀況討論:

(1)直行 1:完全筆直，d=1、後輪函數 by=0 或參數式(t, 0)代入(下圖)。

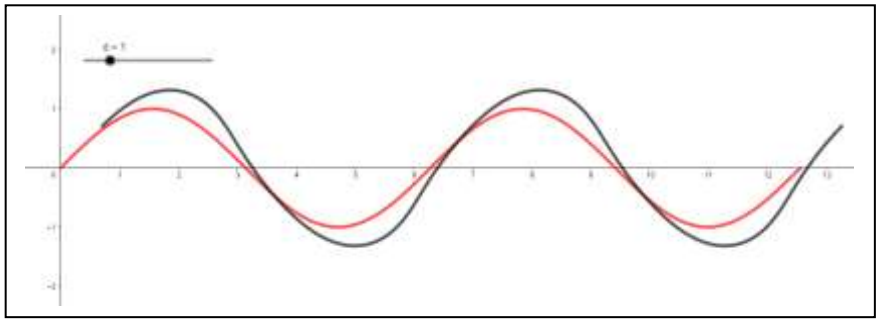
化簡後可得到: $f = \text{Curve}(t + d, 0, t, 0, 5)$



(2)直行 2:考慮一般無法完全的筆直行車，以小角度偏差不斷修正，似於正弦函數。

d=1、後輪函數 by=sin(bx)或參數式(t, sin(t))代入(下圖)。

化簡後可得到: $f = \text{Curve}\left(t + \frac{d}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, \sin(t) + \frac{d\cos(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, t, 0, 4\pi\right)$



(3)過彎 1:過彎軌跡的每一小段，可視為一個個大小不一的圓弧，故以圓做討論。但由於一開始假定車輛向+x 方向行駛，故可將軌跡化為函數；圓方程式並非討論範圍(非函數)，因此另行討論:

(Ⅰ)圓方程式含 t 之推導:

先假設車輛逆時針方向行車。

令後輪 b 坐標為$(rb\cdot\cos t, rb\cdot\sin t)$

如圖 2，前輪座標可表示為:

$(\sqrt{rb^2+d^2}\cdot\cos(a+t), \sqrt{rb^2+d^2}\cdot\sin(a+t))$

合角公式展開:

$$\begin{cases} fx=\sqrt{rb^2+d^2}\cdot(\cos a\cdot\cos t-\sin a\cdot\sin t) \\ fy=\sqrt{rb^2+d^2}\cdot(\sin a\cdot\cos t+\cos a\cdot\sin t) \end{cases}$$

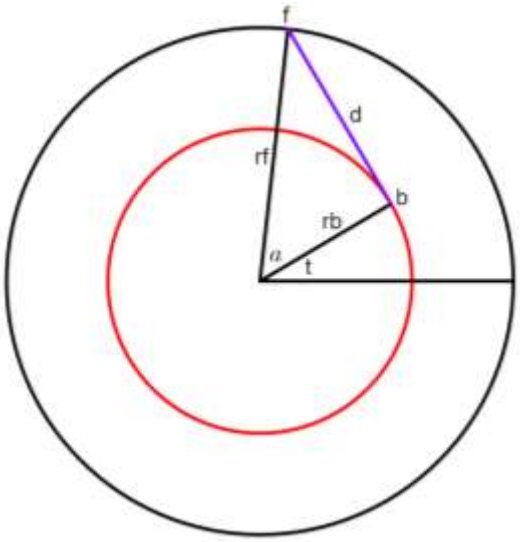


圖 2

又$\cos a=\frac{rb}{\sqrt{rb^2+d^2}}$；$\sin a=\frac{d}{\sqrt{rb^2+d^2}}$，代入前式:

$$\begin{cases} fx=\sqrt{rb^2+d^2}\cdot(\frac{rb}{\sqrt{rb^2+d^2}}\cdot\cos t-\frac{d}{\sqrt{rb^2+d^2}}\cdot\sin t) \\ fy=\sqrt{rb^2+d^2}\cdot(\frac{d}{\sqrt{rb^2+d^2}}\cdot\cos t+\frac{rb}{\sqrt{rb^2+d^2}}\cdot\sin t) \end{cases}$$

可得前輪參數式:

$$(rb\cdot\cos t-d\cdot\sin t, rb\cdot\sin t+d\cdot\cos t) \quad \text{(式 1-3)}$$

(Ⅱ)圓方程式不含 t 之推導:

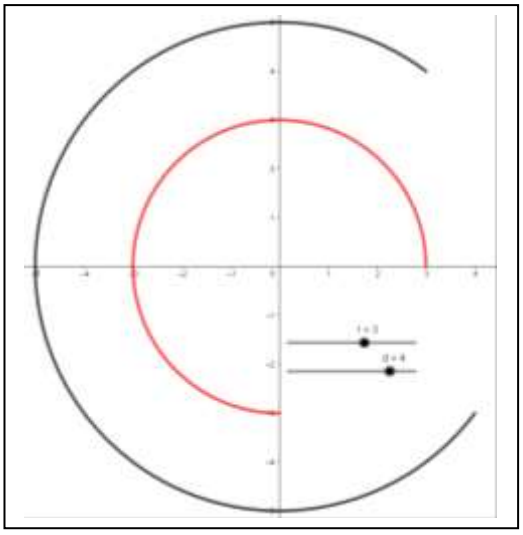
若後輪圓方程式 B:$rb^2=bx^2+by^2$，同理可推知前輪參數式:

$$(rb\cdot\cos bx-d\cdot\sin bx, rb\cdot\sin bx+d\cdot\cos bx) \quad \text{(式 1-4)}$$

以 d=4、後輪方程式$3^2=bx^2+by^2$或參數式$(3\cos(t), 3\sin(t))$代入(下圖)。

化簡後可得到:

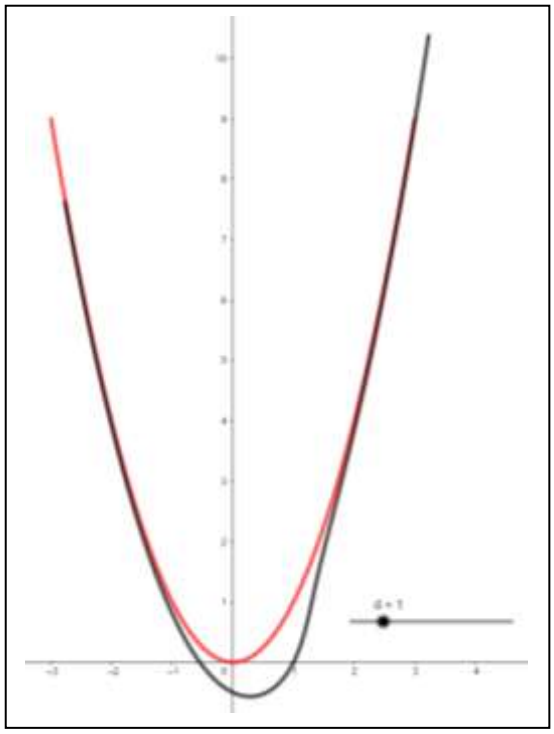
$$f=\text{Curve}(r\ \cos(t)-d\ \sin(t), r\ \sin(t)+d\ \cos(t), t, 0, 1.5\ \pi)$$

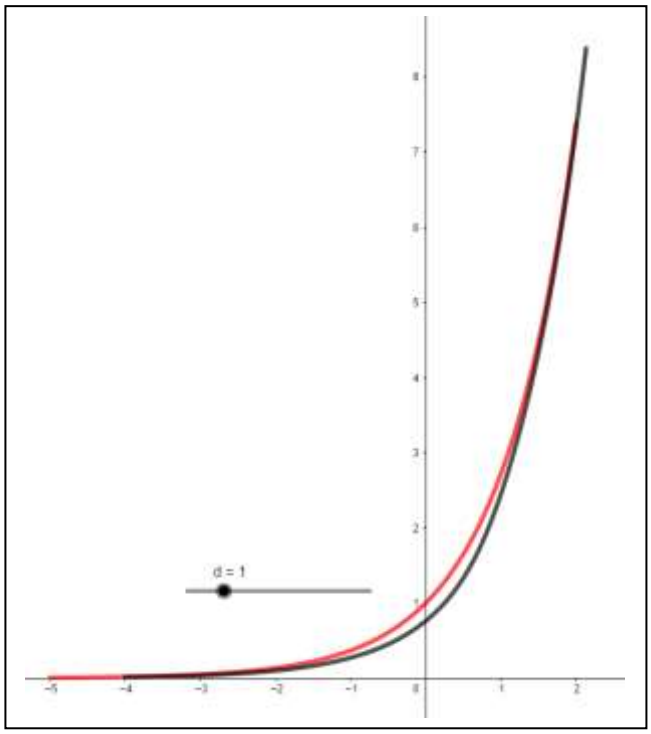


(4)過彎 2:以二次函數來模擬髮夾彎的過程，d=1、$by = bx^2$或(t, t^2)代入(左下圖)。

化簡後可得到:

$$f = \text{Curve}\left(t + \frac{d}{\sqrt{1+2\,t^2}}, t^2 + \frac{d \cdot 2\,t}{\sqrt{1+2\,t^2}}, t, -3, 3\right)$$





(5)過彎 3:e^x微分後為仍為e^x，非常特殊，且可用於模擬 90°過彎。

d=1、by=exp(bx)或(t, e^t)代入(右上圖)。

化簡後可得到:

$$f = \text{Curve}\left(t + \frac{d}{\sqrt{1+e^{2t}}}, e^t + \frac{d\,e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}, t, -5, 2\right)$$

(三)已知輪距 d、前輪軌跡，推導出以前輪表示的後輪函數。

車輛一般以方向盤控制前輪，為了求真實性，我試著以前輪推導後輪，但若不知一開始偏斜角Φ’為何，後輪軌跡有無限多種可能，如實驗二:$\phi' - \phi$的角度不同，後輪將產生不同的軌跡，因此只能根據後輪的追隨性，假設每一個時刻的後輪都位於追隨性後的結果，只要行車路徑夠長，車輛所留下的軌跡方程式便會趨向於此運行模式(圖形)。

(Ⅰ)含時間 t 之推導:

將後推前之關係式整理:

$fx(t) = bx(t) + d(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}})$；$fy(t) = by(t) + d(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}})$

$bx(t) = fx(t) - d(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}})$；$by(t) = fy(t) - d(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}})$

求得$\tan\theta$:如右圖 3 為某一時刻之位置關係，後輪滿足追隨性後的結果。

由圖可知$\tan\phi = \tan(\theta - \theta')$

故求Φ及θ'，再帶入和角公式。

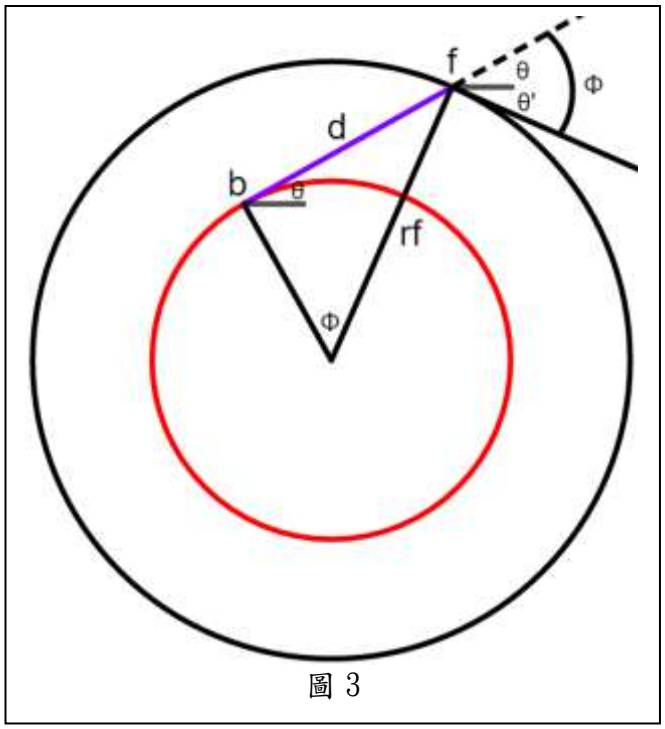


圖 3

求Φ:

$$\sin\phi = \frac{d}{r}$$

$$r = \frac{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}$$

$$\sin\phi = \frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\sqrt{1-\sin^2\phi}}$$

$$= \frac{\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{1-(\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^{\frac{3}{2}}})^2}}$$

$$= \frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3 - d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}$$

求θ'：

$$\tan\theta' = \frac{fy'(t)}{fx'(t)}$$

則$\tan\theta$為:

$$\tan\theta = \tan(\phi + \theta')$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\phi + \tan\theta'}{1 - \tan\phi\tan\theta'}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}+\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}{1-\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}\cdot\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}$$

當前輪參數式為 bx(t)、by(t)，則後輪隨時間 t 的參數式為:

$$bx(t) = fx(t) - d(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}})；by(t) = fy(t) - d(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}})$$

其中$\tan\theta$為 $\frac{\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}+\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}{1-\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}\cdot\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}$

或可代入得:

$$\begin{cases} bx(t) = fx(t) - d(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}+\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}{1-\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}\cdot\frac{fy'(t)}{fx'(t)}})^2}}) \\ by(t) = fy(t) - d(\frac{\frac{\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}+\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}{1-\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}\cdot\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}}{\sqrt{1+(\frac{\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}+\frac{fy'(t)}{fx'(t)}}{1-\frac{d\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{fy'(t)}{fx'(t)})'^2}}\cdot\frac{fy'(t)}{fx'(t)}})^2}}) \end{cases}$$ （式 2-1）

(Ⅱ)不含時間 t 之推導:

同理可推得當前輪留下軌跡(fx, F(fx))，則後輪軌跡為:

$$\begin{cases} bx = fx - \dfrac{d}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\dfrac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}+F'(fx)}{1-\dfrac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}\cdot F'(fx)}\right)^2}} \\ B(bx) = F(fx) - d\left(\dfrac{\dfrac{\dfrac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}+F'(fx)}{1-\dfrac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}\cdot F'(fx)}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\dfrac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}+F'(fx)}{1-\dfrac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}\cdot F'(fx)}\right)^2}}\right) \end{cases} \quad (式\ 2\text{-}2)$$

(四)建立前推後基本模型:

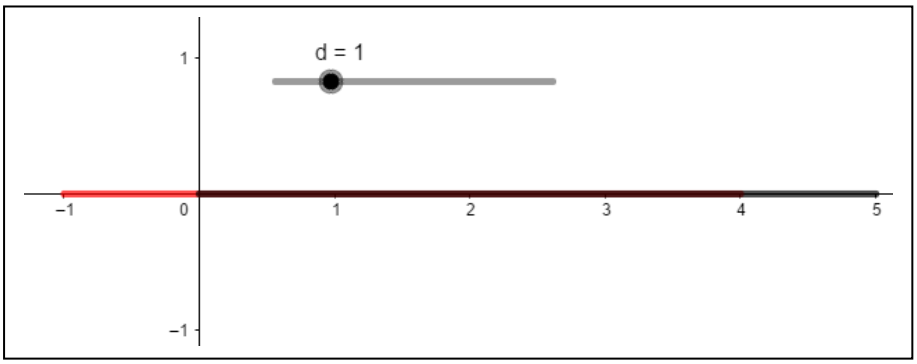
1. 為了求得真實性，利用數學動態軟體 GeoGebra 試作圖形。

2. 黑色為前輪函數；紅色為後輪函數。

3. 分為直行與過彎兩種狀況討論:

(1)直行 1:完全筆直，d=1、前輪函數 fy=0 或參數式(t, 0)代入(下圖)。

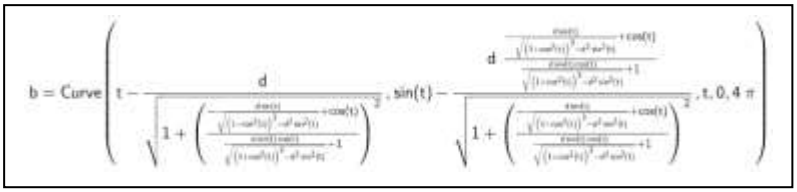
化簡後可得到: $b = \text{Curve}(t - d, 0, t, 0, 5)$

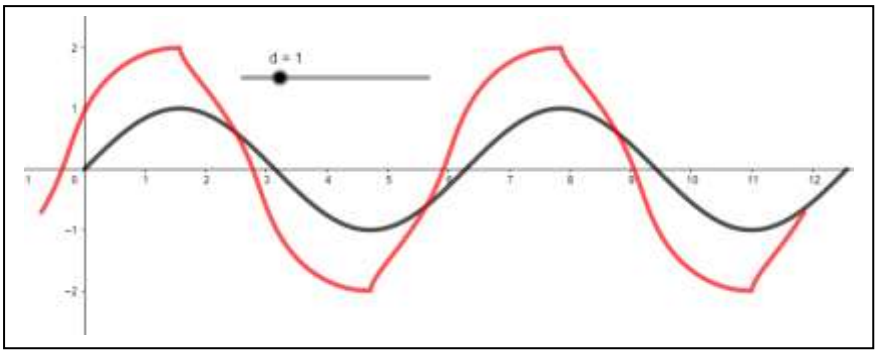


(2)直行 2:考慮一般無法完全的筆直行車，以小角度偏差不斷修正，似於正弦函數。

d=1、前輪函數 fy=sin(fx)或參數式(t, sin(t))代入(下圖)。

化簡後可得到:





(3)過彎 1:過彎軌跡的每一小段，可視為一個個大小不一的圓弧，故以圓做討論。但由於一開始假定車輛向+x 方向行駛，故可將軌跡化為函數；圓方程式並非討論範圍(非函數)，因此另行討論:

(Ⅰ)圓方程式含 t 之推導:

先假設車輛逆時針方向行車。

一樣，令前輪 f 坐標為$(rf\cdot\cos t, rf\cdot\sin t)$

如圖 2，後輪座標可表示為:

$$(\sqrt{rf^2-d^2}\cdot\cos(t-a), \sqrt{rf^2-d^2}\cdot\sin(t-a))$$

差角公式展開:

$$\begin{cases} bx=\sqrt{rf^2-d^2}\cdot(\cos a\cdot\cos t+\sin a\cdot\sin t) \\ by=\sqrt{rf^2-d^2}\cdot(\sin t\cdot\cos a-\cos t\cdot\sin a) \end{cases}$$

又$\cos a=\frac{\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}$；$\sin a=\frac{d}{rf}$，代入前式；

$$\begin{cases} bx=\sqrt{rf^2-d^2}\cdot(\frac{\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\cos t+\frac{d}{rf}\cdot\sin t) \\ by=\sqrt{rf^2-d^2}\cdot(\sin t\cdot\frac{\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}-\cos t\cdot\frac{d}{rf}) \end{cases}$$

可得前輪參數式:

$$(\frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\cos t+\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\sin t, \frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\sin t-\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\cos t) \quad (式\ 2\text{-}3)$$

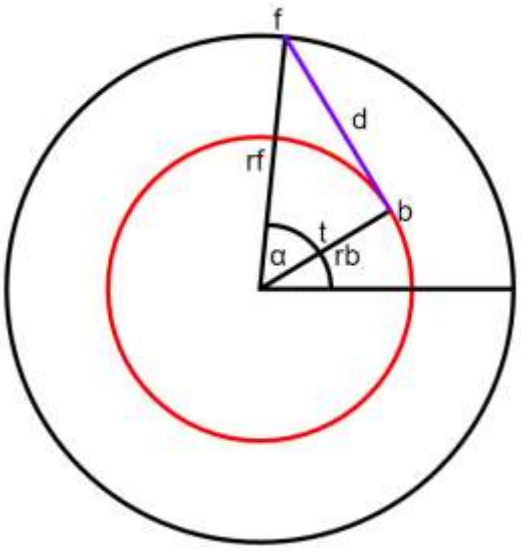


圖 4

(Ⅱ)圓方程式不含 t 之推導:

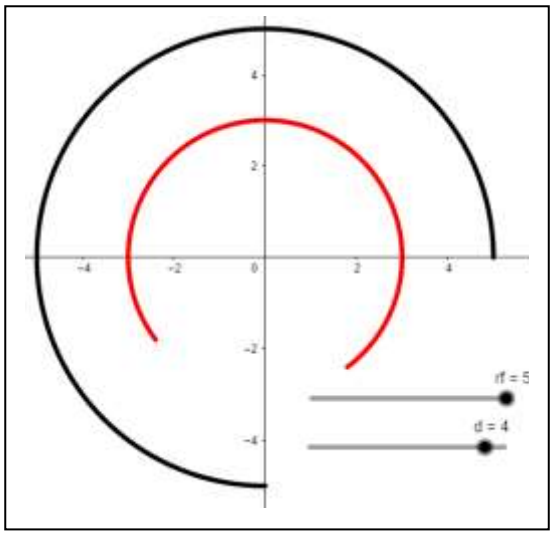
若前輪圓方程式 F:$rf^2 = fx^2 + fy^2$，同理可推知前輪參數式:

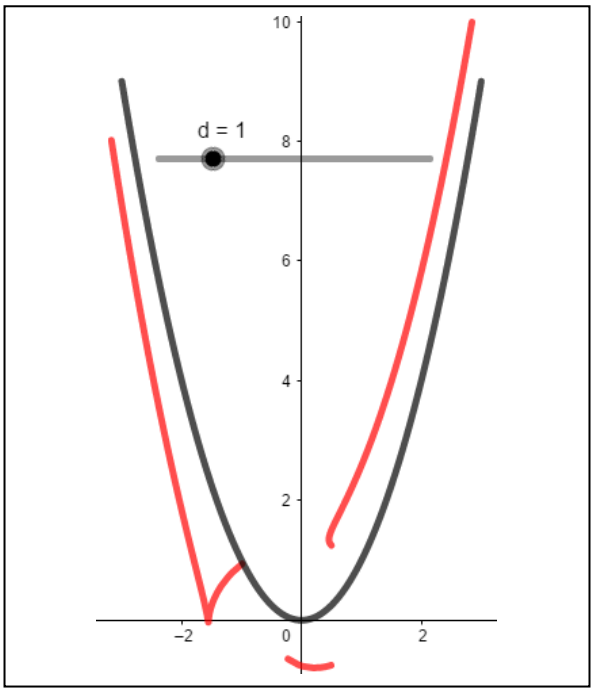
$$\left(\frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\cos fx+\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\sin fx,\ \frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\sin fx-\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\cos fx\right)\quad\text{（式 2-4）}$$

以 d=4、前輪方程式$5^2 = fx^2 + fy^2$或參數式(5cos(t),5sin(t))代入(下左圖)。

化簡後可得到:

$$b = \text{Curve}\left(\frac{rf^2-d^2}{rf}\cos(t)+\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\sin(t),\ \frac{rf^2-d^2}{rf}\sin(t)-\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cos(t),t,0,1.5\pi\right)$$





(4)過彎 2:以二次函數來模擬髮夾彎的過程，d=1、$fy = fx^2$或(t, t^2)代入(右上圖)。

化簡後可得到:

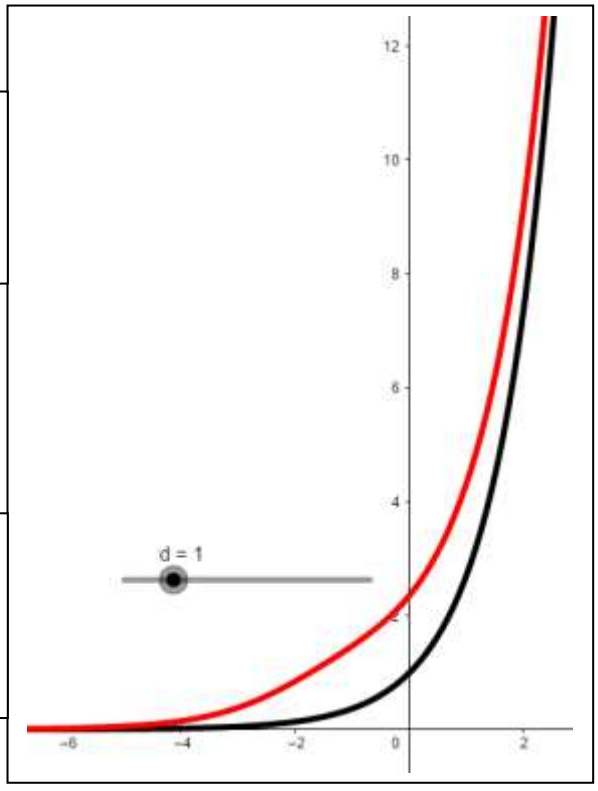
$$b = \text{Curve}\left(t-\frac{d}{\sqrt{1+\left(\frac{\frac{2t}{\sqrt{(1+(2t)^2)^3-d^2\cdot4}}+2t}{1-\frac{4\cdot2t}{\sqrt{(1+(2t)^2)^3-d^2\cdot4}}}\right)^2}},t^2+\frac{d\frac{\frac{2t}{\sqrt{(1+(2t)^2)^3-d^2\cdot4}}+2t}{1-\frac{4\cdot2t}{\sqrt{(1+(2t)^2)^3-d^2\cdot4}}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\frac{2t}{\sqrt{(1+(2t)^2)^3-d^2\cdot4}}+2t}{1-\frac{4\cdot2t}{\sqrt{(1+(2t)^2)^3-d^2\cdot4}}}\right)^2}},t,-3,3\right)$$

(5)過彎 3:用於模擬 90°過彎。

d=1、fy=exp(fx)或(t, e^t)代入(右圖)。

化簡後可得到:

$$b = \text{Curve}\left(t-\frac{d}{\sqrt{1+\left(\frac{\frac{e^t}{\sqrt{(1+e^{2t})^3-d^2e^{2t}}}+e^t}{1-\frac{4e^{2t}}{\sqrt{(1+e^{2t})^3-d^2e^{2t}}}}\right)^2}},e^t+\frac{d\frac{\frac{e^t}{\sqrt{(1+e^{2t})^3-d^2e^{2t}}}+e^t}{1-\frac{4e^{2t}}{\sqrt{(1+e^{2t})^3-d^2e^{2t}}}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\frac{e^t}{\sqrt{(1+e^{2t})^3-d^2e^{2t}}}+e^t}{1-\frac{4e^{2t}}{\sqrt{(1+e^{2t})^3-d^2e^{2t}}}}\right)^2}},t,-5,2\right)$$



(五)已知輪寬 w、左輪軌跡，推導出以左輪表示的右輪函數。

根據結果一，車輛後輪沿切線延長 d 即為前輪位置，而一般車輛的車架垂直構成，可推知“軌跡沿法線延長輪寬 w，將交到另一側軌跡一點”，依此便可推導出以左輪表示的右輪函數(此假設車輛向+x 方向行駛)。

(Ⅰ)含時間 t 之推導:

此為後推前的一段過程:

$$\begin{cases} fx(t) = bx(t) + d\cdot\cos\theta = bx(t) + d(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}) \\ fy(t) = by(t) + d\cdot\sin\theta = by(t) + d(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}) \end{cases}$$

此過程的架構意義為:

“新的函數為原函數沿一方向(其有向角為θ)延長一距離所構成的軌跡方程式”。

在後輪推導前輪中 $\tan\theta$ 為一次微分(切線)、距離為 d，因而得出結論；在左輪推導右輪時，符合一樣的架構，因而代入 $\tan\theta$ 為$\frac{-1}{L'(lx)}$(法線)、距離為 w，結果如下:

$$\begin{cases} rx(t) = lx(t) + w\cdot\cos\theta = lx(t) + w(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}) \\ ry(t) = ly(t) + w\cdot\sin\theta = ly(t) + w(\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}) \end{cases}$$

代入$\tan\theta = -\frac{lx'(t)}{ly'(t)}$；

$$rx(t) = lx(t) + w(\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{lx'(t)}{ly'(t)})^2}})；ry(t) = ly(t) + w(\frac{\frac{lx'(t)}{ly'(t)}}{\sqrt{1+(\frac{lx'(t)}{ly'(t)})^2}})$$

$$\begin{cases} rx(t) = lx(t) + w(\frac{ly'(t)}{\sqrt{lx'(t)^2+ly'(t)^2}}) \\ ry(t) = ly(t) - w(\frac{lx'(t)}{\sqrt{lx'(t)^2+ly'(t)^2}}) \end{cases} \quad (式\ 3\text{-}1)$$

(Ⅱ)不含時間 t 之推導:

同理可推得當左輪留下軌跡$(lx, L(lx))$，可得右輪參數式:

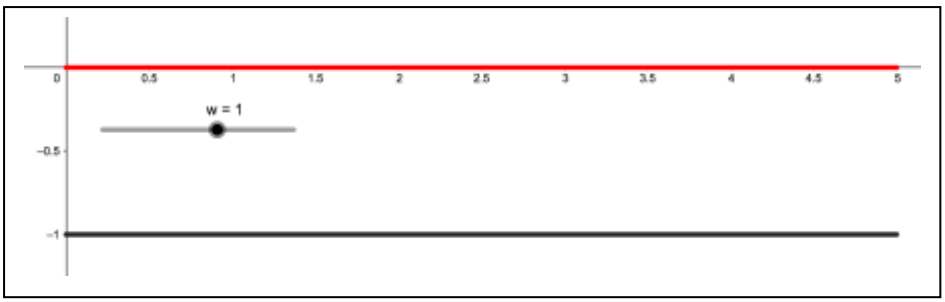
$$(lx + \frac{w\cdot L'(lx)}{\sqrt{1+L'(lx)^2}}, L(lx) - \frac{w}{\sqrt{1+L'(lx)^2}}) \quad (式\ 3\text{-}2)$$

(六)建立左推右基本模型:

1. 利用數學動態軟體 GeoGebra 試作圖形。
2. 紅色為左輪函數；黑色為右輪函數。
3. 分為直行與過彎兩種狀況討論:

(1)直行 1:完全筆直，w=1、左輪函數 ly=0 或參數式(t,0)代入(下圖)。

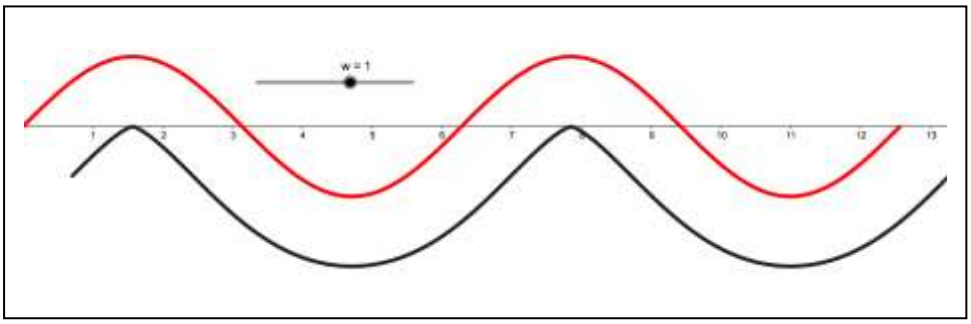
化簡後可得到: $r = \text{Curve}(t, -w, t, 0, 5)$



(2)直行 2:考慮一般無法完全的筆直行車，以小角度偏差不斷修正，似於正弦函數。

w=1、左輪函數 ly=sin(lx)或參數式(t,sin(t))代入(下圖)。

化簡後可得到: $r = \text{Curve}\left(t + w\,\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, \sin(t) - \frac{w}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, t, 0, 4\,\pi\right)$

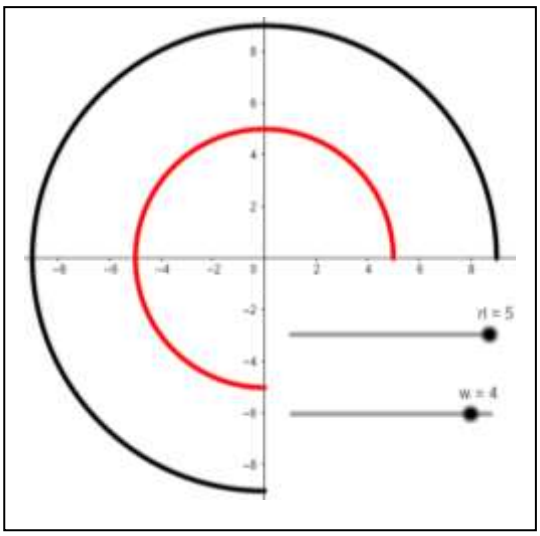


(3)過彎 1:圓形並非函數，因此另行討論。假定車輛逆時針行駛一圓，而法線過圓心，沿著法線延長，軌跡方程式為右側輪軌跡；因此右側輪軌跡與左側軌跡為同心圓，且同一個時刻會位於同一個角度，右側圓半徑多了 w。

以 w=4、左輪方程式$5^2 = lx^2 + ly^2$或參數式(5cos(t),5sin(t))代入(下左圖)。

化簡後可得到:

$r = \text{Curve}((rl + w)\ \cos(t), (rl + w)\ \sin(t), t, 0, 1.5\,\pi)$



左推右圓形公式:

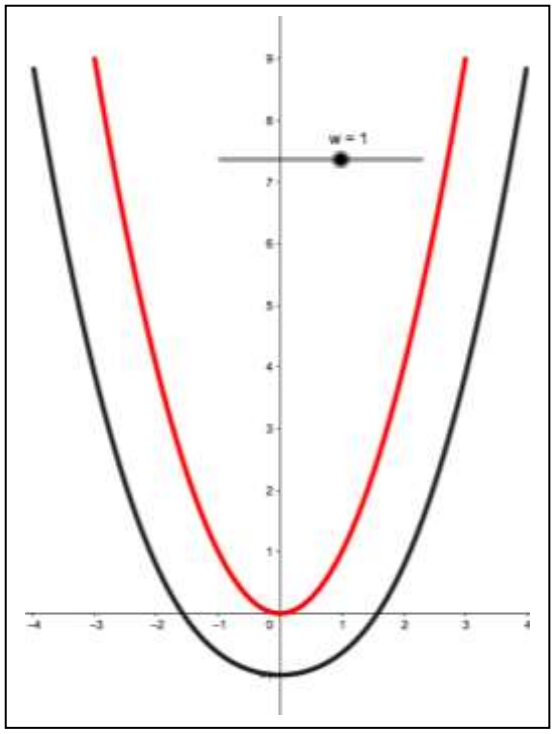
$((rl + w)\cdot\cos(t),\ (rl + w)\cdot\sin(t))$（式 3-3）

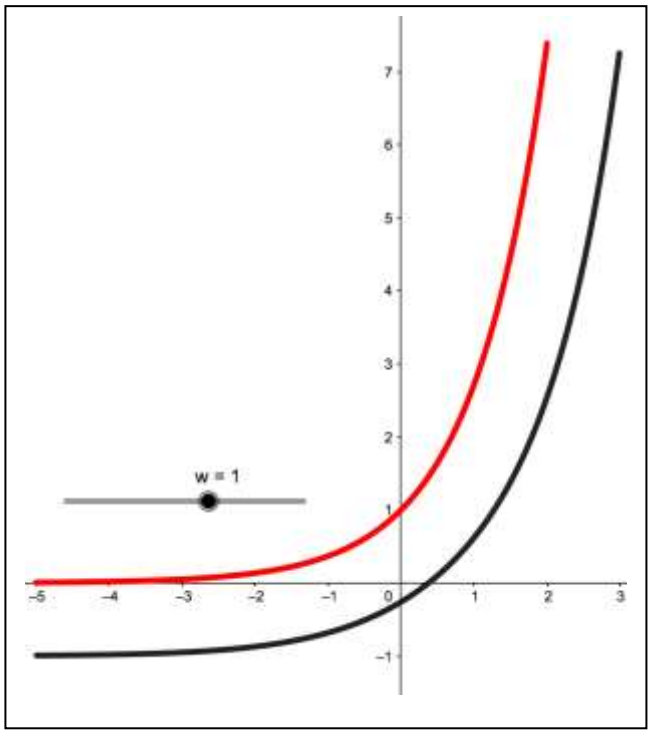
$((rl + w)\cdot\cos lx,\ (rl + w)\cdot\sin lx)$（式 3-4）

(4)過彎 2:以二次函數來模擬髮夾彎的過程，w=1、$ly = lx^2$或(t, t^2)代入(左下圖)。

化簡後可得到:

$$r = \text{Curve}\left(t + w \cdot 2 \cdot \frac{t}{\sqrt{4t^2+1}}, t^2 - \frac{w}{\sqrt{4t^2+1}}, t, -3, 3\right)$$





(5)過彎 3:e^x微分後為仍為e^x，非常特殊，且可用於模擬 90°過彎。

w=1、ly=exp(lx)或(t, e^t)代入(右上圖)。

化簡後可得到:

$$r = \text{Curve}\left(t + w\ \frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}, e^t - \frac{w}{\sqrt{1+e^{2t}}}, t, -5, 2\right)$$

(七)已知輪寬 w、右輪軌跡，推導出以右輪表示的左輪函數。

右推左與左推右的公式發展架構相同，但由於令車輛向+x 方向，其延長之向量與左推右互為相反向量，其公式差一個負號:

(Ⅰ)含時間 t 之公式:

$$\begin{cases} lx(t) = rx(t) - w\left(\frac{ry'(t)}{\sqrt{rx'(t)^2+ry'(t)^2}}\right) \\ ly(t) = ry(t) + w\left(\frac{rx'(t)}{\sqrt{rx'(t)^2+ry'(t)^2}}\right) \end{cases} \quad \text{(式 4-1)}$$

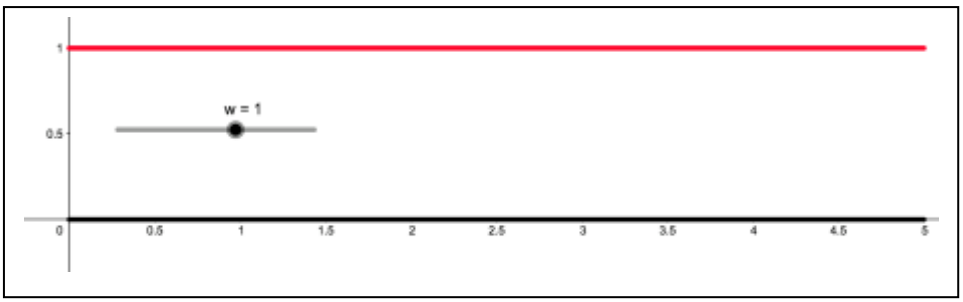
(Ⅱ)不含時間 t 之公式:

$$\left(rx - \frac{w \cdot R'(rx)}{\sqrt{1+R'(rx)^2}}, R(rx) + \frac{w}{\sqrt{1+R'(rx)^2}}\right) \quad \text{(式 4-2)}$$

(八)建立右推左基本模型:

(1)直行 1:完全筆直，w=1、右輪函數 ry=0 或參數式(t,0)代入(下圖)。

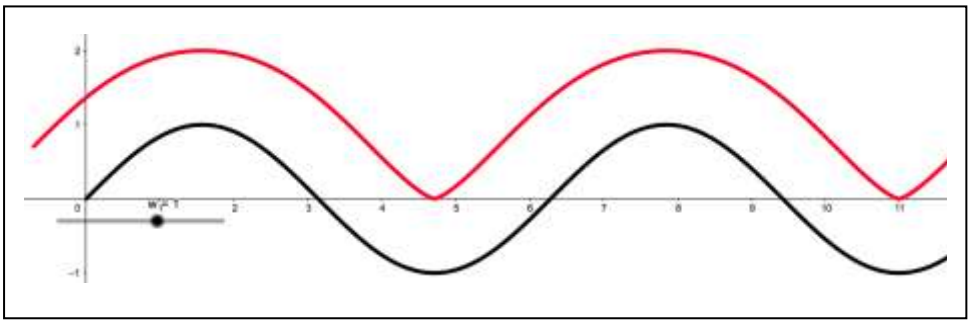
化簡後可得到: $\ell = \text{Curve}(t, w, t, 0, 5)$



(2)直行 2:考慮一般無法完全的筆直行車，以小角度偏差不斷修正，似於正弦函數。

w=1、右輪函數 ry=sin(rx)或參數式(t,sin(t))代入(下圖)。

化簡後可得到: $\ell = \text{Curve}\left(t - w\,\frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, \sin(t) + \frac{w}{\sqrt{1+\cos^2(t)}}, t, 0, 4\,\pi\right)$

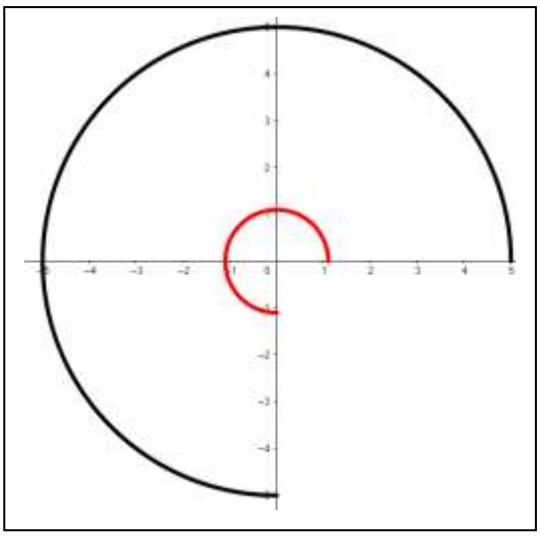


(3)過彎 1:圓形並非函數，因此另行討論。假定車輛逆時針行駛一圓，而法線過圓心，沿著法線延長，軌跡方程式為左側輪軌跡；因此右側輪軌跡與左側軌跡為同心圓，且同一個時刻會位於同一個角度，右側圓半徑多了 w。

以 w=4、右輪方程式$5^2 = rx^2 + ry^2$或參數式(5cos(t),5sin(t))代入(下左圖)。

化簡後可得到:

$\ell = \text{Curve}((rr - w)\ \cos(t), (rr - w)\ \sin(t), t, 0, 1.5\,\pi)$



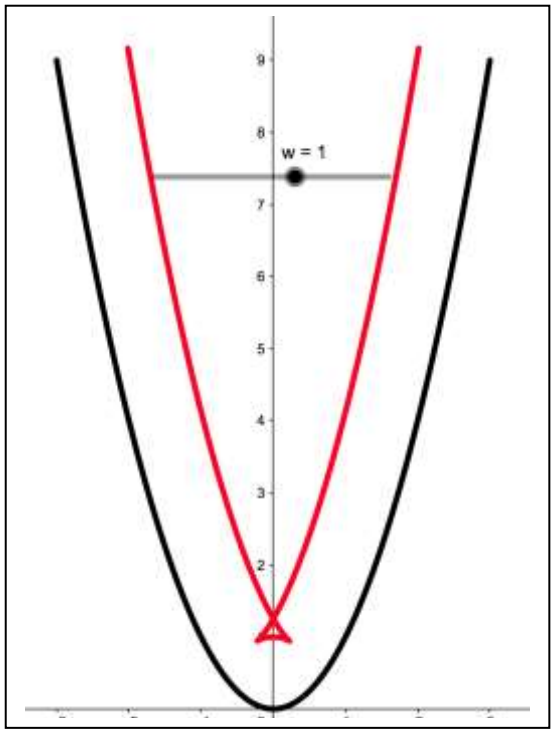
右推左圓形公式:

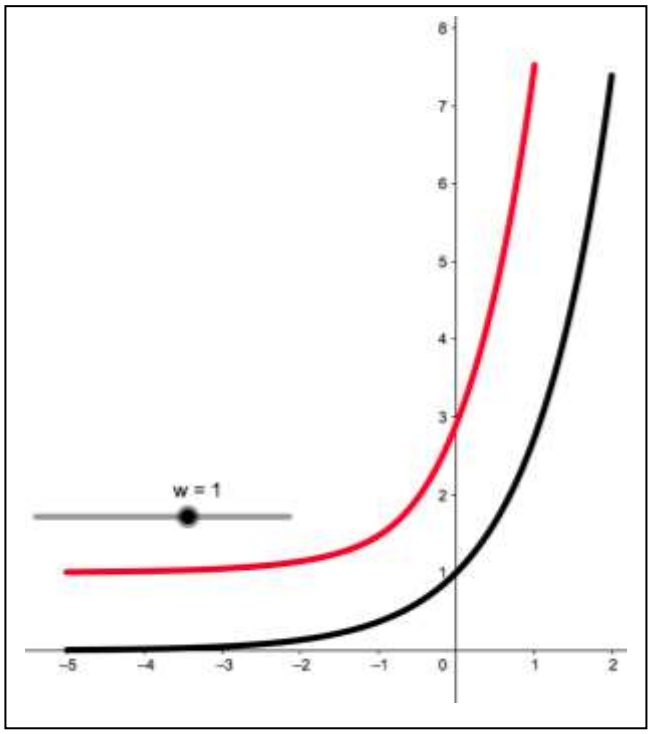
$((rr - w) \cdot \cos(t),\ (rr - w) \cdot \sin(t))$（式 4-3）

$((rr - w) \cdot \cos rx,\ (rr - w) \cdot \sin rx)$（式 4-4）

(4)過彎 2:以二次函數來模擬髮夾彎的過程，w=1、ry = rx^2或(t, t^2)代入(左下圖)。

化簡後可得到: $\ell = \text{Curve}\left(t - w\,\frac{2t}{\sqrt{4t^2+1}}, t^2 + \frac{w}{\sqrt{4t^2+1}}, t, -3, 3\right)$





(5)過彎 3:e^x微分後為仍為e^x，非常特殊，且可用於模擬 90°過彎。

w=1、ry=exp(rx)或(t, e^t)代入(右上圖)。

化簡後可得到: $\ell = \text{Curve}\left(t - w\,\frac{e^t}{\sqrt{1+e^{2t}}}, e^t + \frac{w}{\sqrt{1+e^{2t}}}, t, -5, 2\right)$

三、應用:

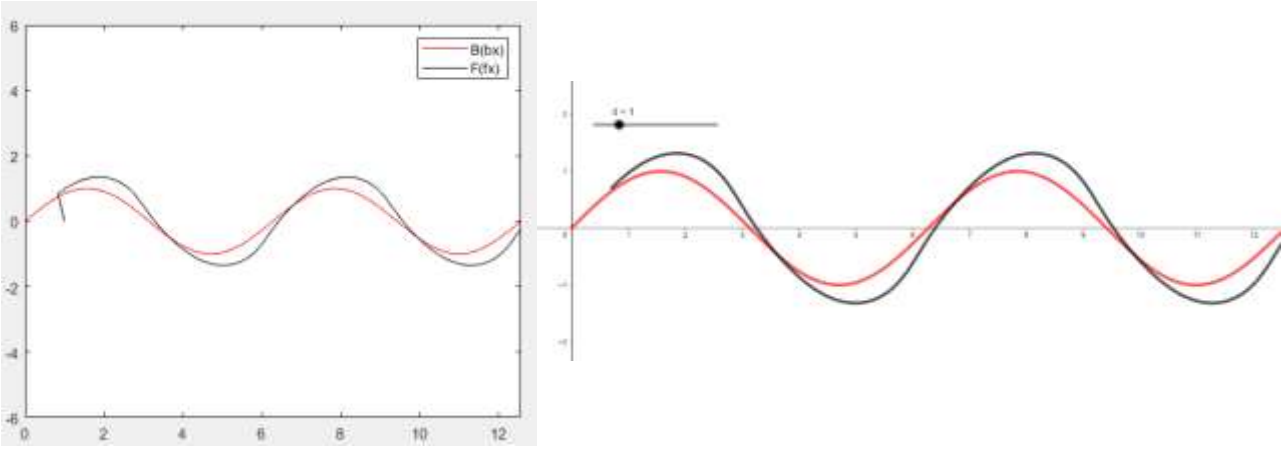
(一)以數學程式軟體 MATLAB，修改跑跑卡丁車之程式不足:

在跑跑卡丁車的遊戲世界裡車子只留下了後輪軌跡，為了解決程式不足並推導成通式，我們將後推前的公式寫成程式，程式碼如下:

```
I = 100;
X0 = 4*pi;
x = linspace(0,4*pi,I+1);
del = X0/100;
inv_del = 1/del;
%令 B(bx) = B
%令 B'(bx) = B1
B = sin(x);
B1 = 0*x;
B1(1) = 0;
```

```
for i = 2:I
B1(i) = ( B(i) - B(i-1) )*inv_del;
end
d = 1;
syms bx;
fx = x+d./sqrt(1+B1.^2);
%令 F(fx) = F
F = B+d.*B1./sqrt(1+B1.^2);
plot(x,B,'r','DisplayName','B(bx)');
hold on
plot(fx,F,'k','DisplayName','F(fx)');
axis([0,4*pi,-6,6]);
legend('show');
```

利用數值微分的方式，取了 100 個間隔做近似值，上面為後推前中 by=sin(bx)、d=1 的實例，故座標 x 極限取 0,4*pi，跑出來的圖也與建立基本模型時 GeoGebra 上的圖一致。



一般情況中，車輪留下的軌跡常不為一特定函數，因此我選用數值近似而不是解析式，可以用選取多點的方式，將複雜的後輪函數改成數值微分，在實際運用時將較為實際。

(二)可使用實際辨析之方法，在車禍等刑事鑑定中發揮適當用途(如前於實際辨析所述)。

柒、結論

一、公式:

(一)後推前:

1. 通式:

$$(\mathrm{bx}(t)+\frac{d\cdot \mathrm{bx}'(t)}{\sqrt{\mathrm{bx}'(t)^2+\mathrm{by}'(t)^2}},\mathrm{by}(t)+\frac{d\cdot \mathrm{by}'(t)}{\sqrt{\mathrm{bx}'(t)^2+\mathrm{by}'(t)^2}}) \quad (式\ 1\text{-}1)$$

$$(\mathrm{bx}+\frac{d}{\sqrt{1+B'(\mathrm{bx})^2}},B(\mathrm{bx})+d\frac{B'(\mathrm{bx})}{\sqrt{1+B'(\mathrm{bx})^2}}) \quad (式\ 1\text{-}2)$$

2. 圓形公式:

$$(rb\cdot\cos t-d\cdot\sin t,rb\cdot\sin t+d\cdot\cos t) \quad (式\ 1\text{-}3)$$

$$(rb\cdot\cos \mathrm{bx}-d\cdot\sin \mathrm{bx},rb\cdot\sin \mathrm{bx}+d\cdot\cos \mathrm{bx}) \quad (式\ 1\text{-}4)$$

(二)前推後(趨向):

1. 通式:

$$\begin{cases}\mathrm{bx}(t)=\mathrm{fx}(t)-d\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\dfrac{d\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'^2}}+\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)}}{1-\dfrac{d\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'^2}}\cdot\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)}}\right)^2}}\right)\\ \mathrm{by}(t)=\mathrm{fy}(t)-d\left(\dfrac{\dfrac{\dfrac{d\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'^2}}+\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)}}{1-\dfrac{d\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'^2}}\cdot\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\dfrac{d\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'^2}}+\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)}}{1-\dfrac{d\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'}{\sqrt{(1+(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})^2)^3-d^2\cdot(\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)})'^2}}\cdot\frac{\mathrm{fy}'(t)}{\mathrm{fx}'(t)}}\right)^2}}\right)\end{cases} \quad (式\ 2\text{-}1)$$

$$\begin{cases} bx = fx - \dfrac{d}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\frac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}+F'(fx)}{1-\frac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}\cdot F'(fx)}\right)^2}} \\ B(bx) = F(fx) - d\left(\dfrac{\frac{\frac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}+F'(fx)}{1-\frac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}\cdot F'(fx)}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\frac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}+F'(fx)}{1-\frac{d\cdot F''(fx)}{\sqrt{(1+F'(fx)^2)^3-d^2\cdot F''(fx)^2}}\cdot F'(fx)}\right)^2}}\right) \quad \text{（式 2-2）} \end{cases}$$

2. 圓形公式:

$$\left(\frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\cos t+\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\sin t,\frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\sin t-\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\cos t\right) \quad \text{（式 2-3）}$$

$$\left(\frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\cos fx+\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\sin fx,\frac{rf^2-d^2}{rf}\cdot\sin fx-\frac{d\sqrt{rf^2-d^2}}{rf}\cdot\cos fx\right) \quad \text{（式 2-4）}$$

(三)左推右:

1. 通式:

$$\left(lx(t)+w\left(\frac{ly'(t)}{\sqrt{lx'(t)^2+ly'(t)^2}}\right),ly(t)-w\left(\frac{lx'(t)}{\sqrt{lx'(t)^2+ly'(t)^2}}\right)\right) \quad \text{（式 3-1）}$$

$$\left(lx+\frac{w\cdot L'(lx)}{\sqrt{1+L'(lx)^2}},L(lx)-\frac{w}{\sqrt{1+L'(lx)^2}}\right) \quad \text{（式 3-2）}$$

2. 圓形公式:

$$((rl+w)\cdot\cos(t),\ (rl+w)\cdot\sin(t)) \quad \text{（式 3-3）}$$

$$((rl+w)\cdot\cos lx,\ (rl+w)\cdot\sin lx) \quad \text{（式 3-4）}$$

(四)右推左:

1. 通式:

$$\left(rx(t)-w\left(\frac{ry'(t)}{\sqrt{rx'(t)^2+ry'(t)^2}}\right),ry(t)+w\left(\frac{rx'(t)}{\sqrt{rx'(t)^2+ry'(t)^2}}\right)\right) \quad \text{（式 4-1）}$$

$$\left(rx-\frac{w\cdot R'(rx)}{\sqrt{1+R'(rx)^2}},R(rx)+\frac{w}{\sqrt{1+R'(rx)^2}}\right) \quad \text{（式 4-2）}$$

2. 圓形公式:

$$((rr-w)\cdot\cos(t),\ (rr-w)\cdot\sin(t)) \quad \text{（式 4-3）}$$

$$((rr-w)\cdot\cos rx,\ (rr-w)\cdot\sin rx) \quad \text{（式 4-4）}$$

二、應用:

(一)修改跑跑卡丁車之程式不足:

程式碼如下:

```
I = 100;
X0 = 4*pi;
x = linspace(0,4*pi,I+1);
del = X0/100;
inv_del = 1/del;
%令 B(bx) = B
%令 B'(bx) = B1
B = sin(x);
B1 = 0*x;
B1(1) = 0;
for i = 2:I
B1(i) = ( B(i) - B(i-1) )*inv_del;
end
d = 1;
syms bx;
fx = x+d./sqrt(1+B1.^2);
%令 F(fx) = F
F = B+d.*B1./sqrt(1+B1.^2);
plot(x,B,'r','DisplayName','B(bx)');
hold on
plot(fx,F,'k','DisplayName','F(fx)');
axis([0,4*pi,-6,6]);
legend('show');
```

選用數值近似而不是解析式，可以用選取多點的方式，將複雜的後輪函數改成數值微分，在實際運用時將較為實際。

(二)應用於刑事鑑定、車禍現場等。

依照下列步驟即可得到車輛的資訊。

步驟 1:找出目標車痕，利用左右互相平行的特性，找到其一組前後輪的系統。

步驟 2:在兩條軌跡上各做 n 條切線，共 2n 條，產生 4n 個方向的射線。

步驟 3:其中必有 n 條射線接到另一胎痕的長度相同，此長度為輪距；射線方向必為同向(順或反)，便是行進方向；此兩條射線起始點的共同胎痕即為後輪胎痕。

步驟 4:根據前後輪關係，即可判斷左右兩側，在一側作法線，交另一側距離為輪寬 w。

藉此，即可得知 1.四輪胎痕 2.輪距、輪寬 3.行車方向，在刑事鑑定上便可發揮作用，如:以輪距、輪寬去推斷逃逸車型、以行進方向推知逃逸方向等。

捌、參考資料及其他

1.曹亮吉・2002 年 2 月 17 號・怎麼說它有多彎？・取自

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_16_08_2/index.html?fbclid=IwAR01yCSxoRx0wDJjt2MiS6rC7krJvQ2-OBJ74plA-BHdUKfPEKdYa8gEbyY

2.Colin Adams、Joel Hass、Abigail Thompson 著・師明睿 譯・

2003 年 1 月 22 號・微積分之屠龍寶刀・天下文化出版

3.數值微分範例(請教學長):

```
I = 100;
X0 = 1;
x = linspace(0, X0, I+1);
del = X0/100;
inv_del = 1/del;

%Original function, should be any function
y = sin(2*pi*x).^2;

%Numerical derivative using first order approx
y1 = 0*x;       %First create a space with correct dimention
y1(1) = 0;      %First term is meaninless for a causal system

%Similar for secondderivative
y2 = 0*x;
y2(1) = 0;
y2(2) = 0;

%Observe that
% y1(2) = ( y(2) - y(1) )*inv_del;
% y1(3) = ( y(3) - y(2) )*inv_del;
% ......

%We obtain
for i = 2:I
    y1(i) = ( y(i) - y(i-1) )*inv_del;
end
for i = 3:I
    y2(i) = ( y1(i) - y1(i-1) )*inv_del;
end

%showing original
plot(x, y, 'DisplayName','y');
```

```
%showing first derivative
hold on
plot(x, y1,'DisplayName','y1');
plot(x, y2,'DisplayName','y2');
legend('show');
```

【評語】010006

本文旨在研究汽(轎)車四個輪子之胎痕關係。藉由車體結構之限制:左右互相平行，後輪沿著車體(切線方向)延長，便是當時刻之前輪位置，使得前輪座標和後輪座標、輪距 d，具有特定的關係式。本文得到的結果有一定的興趣及創意。比較可惜的是，導出一堆複雜的微分方程等式，但是沒有辦法處理，這方面值得再加強。